

## О ТЕОРЕМЕ ДЖЕКСОНА ДЛЯ МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ, ОПРЕДЕЛЯЕМОГО НЕСИММЕТРИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

М. К. Потапов и Ф. М. Бериша

Аннотация. В этой работе рассматривается класс несимметричных операторов обобщенного сдвига, для каждого из них вводится обобщенные модули гладкости и для них доказывается теорема Джексона и теорема, обратная ей.

ABSTRACT. In this paper a class of asymmetrical operators of generalised translation is introduced, for each of them generalised moduli of smoothness are introduced, and Jackson's and its converse theorems are proved for those moduli.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [5] был введен в рассмотрение несимметричный оператор обобщенного сдвига, с его помощью был определен обобщенный модуль гладкости и для него доказана теорема о совпадении класса функций, определяемого этим модулем, с классом функций, имеющих данной порядок наилучшего приближения алгебраическими многочленами.

В этой работе рассматривается класс несимметричных операторов обобщенного сдвига, для каждого из них вводится обобщенные модули гладкости и для них доказывается теорема Джексона и теорема, обратная ей.

### 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ

Обозначим через  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , множество функций  $f$ , измеримых по Лебегу и суммируемых в  $p$ -й степень на отрезке  $[-1, 1]$ , а через  $L_\infty$  обозначим множество функций, непрерывных на отрезке  $[-1, 1]$ , причем

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left( \int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Через  $L_{p,\alpha}$  обозначим множество функций  $f$ , таких, что  $f(x)(1-x^2)^\alpha \in L_p$ , причем

$$\|f\|_{p,\alpha} = \|f(x)(1-x^2)^\alpha\|_p.$$

---

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 41A35, Secondary 41A50, 42A16. (UDK 517.5.)

*Key words and phrases*. Generalised modulus of smoothness, asymmetric operator of generalised translation, Jackson theorem, converse theorem, best approximations by algebraic polynomials.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследования (грант No. 96-01-00094) и программы поддержки ведущих научных школ (грант No. 96/97-15-96073).

Через  $E_n(f)_{p,\alpha}$  обозначим наилучшее приближение функций  $f$  при помощи алгебраических многочленов степени не выше, чем  $n - 1$ , в метрике  $L_{p,\alpha}$ , т.е.

$$E_n(f)_{p,\alpha} = \inf_{P_n} \|f - P_n\|_{p,\alpha},$$

где  $P_n$  — алгебраический многочлен степени не выше, чем  $n - 1$ .

Пусть  $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Для суммируемой функции  $f$  введем оператор обобщенного сдвига по правилу

$$\hat{\tau}_t(f, x, \mu) = \frac{1}{\pi(1-x^2)^{\mu/2}(\cos t/2)^{2\mu}} \times \int_0^\pi (1-R^2)^{\mu/2} f(R) \cos \mu(\varphi_1 - \varphi) d\varphi_1,$$

где

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta_1, \quad y = \cos t, \quad z = \cos \varphi_1, \\ R &= xy - z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = \cos \theta, \\ \sin \theta \cos \varphi &= \cos \theta_1 \sin t + \sin \theta_1 \cos t \cos \varphi_1, \\ \sin \theta \sin \varphi &= \sin \theta_1 \sin \varphi_1. \end{aligned} \tag{1}$$

При помощи этого оператора обобщенного сдвига определим обобщенный модуль гладкости по правилу

$$\hat{\omega}(f, \delta, \mu)_{p,\alpha} = \sup_{|t| \leq \delta} \|\hat{\tau}_t(f, x, \mu) - f(x)\|_{p,\alpha}.$$

Полагая  $y = \cos t$ ,  $z = \cos \varphi_1$  в операторе  $\hat{\tau}_t(f, x, \mu)$ , обозначим его через  $\tau_y(f, x, \mu)$  и перепишем в виде

$$\tau_y(f, x, \mu) = \frac{2^\mu}{\pi(1-x^2)^{\mu/2}(1+y)^\mu} \times \int_{-1}^1 (1-R^2)^{\mu/2} f(R) \cos \mu(\varphi_1 - \varphi) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

где  $R$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi$  определены формулами (1).

Обозначим через  $D_{x,\nu,\mu}$  операторы дифференцирования определяемые по правилу

$$D_{x,\nu,\mu} = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} + (\mu - \nu - (\nu + \mu + 2)x) \frac{d}{dx}.$$

Очевидно, что

$$D_{x,\nu,\mu} = (1-x)^{-\nu}(1+x)^{-\mu} \frac{d}{dx} (1-x)^{\nu+1}(1+x)^{\mu+1} \frac{d}{dx}.$$

Будем писать, что  $f(x) \in AD(p, \alpha, \mu)$ , если  $f \in L_{p,\alpha}$ ,  $f(x)$  имеет абсолютно непрерывную производную на каждом отрезке  $[a, b] \subset (-1, 1)$  и  $D_{x,\mu,\mu}f(x) \in L_{p,\alpha}$ .

Пусть

$$K(f, \delta, \mu)_{p,\alpha} = \inf_{g \in AD(p,\alpha,\mu)} (\|f - g\|_{p,\alpha} + \delta^2 \|D_{x,\mu,\mu}g(x)\|_{p,\alpha})$$

$K$ -функционал типа Петре, интерполирующий между пространствами  $L_{p,\alpha}$  и  $AD(p, \alpha, \mu)$ .

Будем обозначать через  $P_n^{(\nu,\mu)}(x)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) многочлены Якоби, т.е. многочлены степени  $n$ , ортогональные друг другу с весом  $(1-x)^\nu(1+x)^\mu$  на отрезке  $[-1, 1]$  и нормированные условием  $P_n^{(\nu,\mu)}(1) = 1$  ( $n = 0, 1, \dots$ ).

Пусть  $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Через  $a_n(f)$  обозначим коэффициенты Фурье–Якоби функции  $f \in L_{1,\mu}$  по системе многочленов Якоби  $\{P_n^{(\mu,\mu)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ , т.е.

$$a_n(f) = \int_{-1}^1 f(x) P_n^{(\mu,\mu)}(x) (1-x^2)^\mu dx \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Определим следующие симметричные операторы обобщенного сдвига, играющие в дальнейшем вспомогательную роль

$$T_y(f, x, \mu) = \frac{1}{\gamma_\mu} \int_{-1}^1 (1-z^2)^{\mu-1/2} f(R) dz,$$

где

$$\gamma_\mu = \int_{-1}^1 (1-z^2)^{\mu-1/2} dz,$$

$\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $R$  — определено формулами (1).

Целью этой статьи является доказательство следующего утверждения.

**Теорема 2.1.** Пусть даны числа  $p$ ,  $\mu$  и  $\alpha$  такие, что  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ;

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} < \alpha - \frac{\mu}{2} \leq 0 & \quad \text{при } p = 1, \\ -\frac{1}{2p} < \alpha - \frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} & \quad \text{при } 1 < p < \infty, \\ 0 \leq \alpha - \frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} & \quad \text{при } p = \infty. \end{aligned}$$

Пусть  $f \in L_{p,\alpha}$ . Тогда для любого натурального  $n$  справедливы неравенства

$$C_1 E_n(f)_{p,\alpha} \leq \hat{\omega}\left(f, \frac{1}{n}, \mu\right)_{p,\alpha} \leq C_2 \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^n \nu E_\nu(f)_{p,\alpha},$$

где положительные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  не зависят от  $f$  и  $n$ .

Заметим, что при  $\mu = 0$  теорема доказана в работе [4]. При  $\mu = 2$  теорема доказана в работе [6].

### 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

**Лемма 3.1.** Оператор  $\tau_y(f, x, \mu)$  обладает следующими свойствами:

- 1) Оператор  $\tau_y(f, x, \mu)$  линеен по  $f$ ;
- 2)  $\tau_1(f, x, \mu) = f(x)$ ;
- 3)  $\tau_y\left(P_n^{(\mu,\mu)}, x, \mu\right) = P_n^{(\mu,\mu)}(x) P_n^{(0,2\mu)}(y) \quad (n = 0, 1, \dots)$ ;
- 4)  $\tau_y(1, x, \mu) = 1$ ;
- 5) Если  $g(x) \tau_y(f, x, \mu) \in L_{1,\mu}$  для любого  $y$ , то

$$\int_{-1}^1 f(x) \tau_y(g, x, \mu) (1-x^2)^\mu dx = \int_{-1}^1 g(x) \tau_y(f, x, \mu) (1-x^2)^\mu dx;$$

- 6)  $a_n(\tau_y(f, x, \mu)) = a_n(f) P_n^{(0,2\mu)}(y) \quad (n = 0, 1, \dots)$ .

*Доказательство.* Свойства 1) и 2) следуют сразу из определения оператора  $\tau_y(f, x, \mu)$ .

Для доказательства свойства 3) рассмотрим функции

$$P_{\mu\nu}^l(z) = P_n^{(\alpha,\beta)}(z) 2^{-\mu} i^{\mu-\nu} \sqrt{\frac{(l-\mu)!(l+\mu)!}{(l-\nu)!(l+\nu)!}} (1-z)^{\frac{\mu-\nu}{2}} (1+z)^{\frac{\mu+\nu}{2}},$$

где  $l = n + \frac{\alpha+\beta}{2}$ ,  $\mu = \frac{\alpha+\beta}{2}$ ,  $\nu = \frac{\beta-\alpha}{2}$ . Полагая  $k = \mu$ ,  $\nu = 0$  в формуле умножения [7, с.140] для функции  $P_{\mu\nu}^l(z)$ , получим равенство из свойства 3).

Свойство 4) вытекает из свойства 3) при  $n = 0$ .

Докажем теперь свойство 5). Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 f(x) \tau_y(g, x, \mu) (1 - x^2)^\mu dx \\ &= \frac{2^\mu}{\pi(1+y)^\mu} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x) g(R) (1 - R^2)^{\mu/2} (1 - x^2)^{\mu/2} \\ &\quad \times \cos \mu(\varphi_1 - \varphi) \frac{dz dx}{\sqrt{1 - z^2}}, \end{aligned}$$

где  $R$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi$  определены формулами (1). Сделав в этом двойном интеграле замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} x &= Ry + V\sqrt{1 - R^2}\sqrt{1 - y^2}, \\ z &= -\frac{R\sqrt{1 - y^2} - Vy\sqrt{1 - R^2}}{\sqrt{1 - \left(Ry + V\sqrt{1 - R^2}\sqrt{1 - y^2}\right)^2}}, \end{aligned}$$

получим, что

$$I_1 = \int_{-1}^1 g(R) \tau_y(f, R, \mu) (1 - R^2)^\mu dR,$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства свойства 6) рассмотрим

$$I_2 = a_n(\tau_y(f, x, \mu)) = \int_{-1}^1 \tau_y(f, x, \mu) P_n^{(\mu, \mu)}(x) (1 - x^2)^\mu dx.$$

Используя свойства 5) и 3), получаем, что

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-1}^1 f(x) \tau_y\left(P_n^{(\mu, \mu)}, x, \mu\right) (1 - x^2)^\mu dx \\ &= P_n^{(0, 2\mu)}(y) \int_{-1}^1 f(x) P_n^{(\mu, \mu)}(x) (1 - x^2)^\mu dx. \end{aligned}$$

Лемма 3.1 доказана.  $\square$

**Лемма 3.2.** Пусть даны числа  $p$  и  $\alpha$  такие, что  $1 \leq p \leq \infty$ ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &< \alpha \leq 1 && \text{при } p = 1, \\ 1 - \frac{1}{2p} &< \alpha < \frac{3}{2} - \frac{1}{2p} && \text{при } 1 < p < \infty, \\ 1 &\leq \alpha < \frac{3}{2} && \text{при } p = \infty. \end{aligned}$$

Пусть  $R$  определено формулами (1). Тогда для любой измеримой на отрезке  $[-1, 1]$  функции  $f$  справедливо неравенство

$$\left\| \int_{-1}^1 (1 - R^2) |f(R)| \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \right\|_{p, \alpha-1} \leq C \|f\|_{p, \alpha},$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $f$  и  $t$ .

Лемма 3.2 дана в работе [6].

**Лемма 3.3.** Пусть даны числа  $p$ ,  $\mu$  и  $\alpha$  такие, что  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ;

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} < \alpha - \frac{\mu}{2} \leq 0 & \quad \text{при } p = 1, \\ -\frac{1}{2p} < \alpha - \frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} & \quad \text{при } 1 < p < \infty, \\ 0 \leq \alpha - \frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} & \quad \text{при } p = \infty. \end{aligned}$$

Пусть  $f \in L_{p,\alpha}$ . Тогда справедливо неравенство

$$\|\hat{\tau}_t(f, x, \mu)\|_{p,\alpha} \leq C \frac{1}{(\cos t/2)^{2\mu}} \|f\|_{p,\alpha},$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $f$ ,  $t$  и  $\mu$ .

*Доказательство.* Пусть

$$I = \|\hat{\tau}_t(f, x, \mu)\|_{p,\alpha}.$$

Тогда

$$I = \frac{1}{\pi(\cos t/2)^{2\mu}} \times \left\| \frac{1}{(1-x^2)^{\mu/2}} \int_{-1}^1 (1-R^2)^{\mu/2} f(R) \cos \mu(\varphi_1 - \varphi) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right\|_{p,\alpha},$$

где  $R$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi$  даны формулами (1). Применяя лемму 3.2, получаем, что

$$I \leq C_1 \frac{1}{(\cos t/2)^{2\mu}} \|(1-x^2)^{\mu/2-1} |f(x)|\|_{p,\alpha+1-\mu/2} = C_1 \frac{1}{(\cos t/2)^{2\mu}} \|f\|_{p,\alpha}.$$

Лемма 3.3 доказана.  $\square$

**Лемма 3.4.** Пусть функция  $f(x)$  имеет на каждом отрезке  $[a, b] \subset (-1, 1)$  абсолютно непрерывную производную  $f'(x)$ ,  $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  и пусть  $D_{x,\mu,\mu} f(x) \in L_{1,\mu}$ . Тогда

- 1) При фиксированном  $y$  функция  $\tau_y(f, x, \mu)$  имеет на каждом отрезке  $[c, d] \subset (-1, 1)$  абсолютно непрерывную производную  $\frac{d}{dx} \tau_y(f, x, \mu)$ .
- 2) При фиксированном  $x$  функция  $\tau_y(f, x, \mu)$  имеет на каждом отрезке  $[c, d] \subset (-1, 1)$  абсолютно непрерывную производную  $\frac{d}{dy} \tau_y(f, x, \mu)$ .
- 3) Для почти всех  $x$  и  $y$  справедливы равенства

$$\tau_y(D_{x,\mu,\mu} f, x, \mu) = D_{x,\mu,\mu} \tau_y(f, x, \mu) = D_{y,0,2\mu} \tau_y(f, x, \mu).$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{(1-R^2)^{\mu/2} \cos \mu(\varphi_1 - \varphi)}{(1-x^2)^{\mu/2} (1+y)^2 \sqrt{1-z^2}} f(R),$$

где  $R$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi$  определены формулами (1). Нетрудно доказать, что при фиксированных  $y$  и  $z$ , либо  $R$  — монотонная функция от  $x$  на отрезке  $[-1, 1]$ , либо, если существует конечно число  $\theta_0 = \arctg(z \operatorname{tg} t)$ ,  $R$  — монотонная функция от  $x$  на каждом из отрезков  $[-1, \cos \theta_0]$  и  $[\cos \theta_0, 1]$ . Поэтому заключаем, что функция  $\varphi'(x)$  — абсолютно непрерывна на каждом отрезке  $[c, d] \subset (-1, 1)$ . Отсюда утверждение 1) следует после применения теоремы Лебега о переходе пределом под знаком интеграла.

Учитывая симметричность  $R$  по  $x$  и  $y$ , аналогичным рассуждением доказывается абсолютная непрерывность функции  $\frac{d}{dy} \tau_y(f, x, \mu)$ .

Докажем теперь равенство

$$\tau_y(D_{x,\mu,\mu} f, x, \mu) = D_{x,\mu,\mu} \tau_y(f, x, \mu). \quad (2)$$

Из 1) следует, что существует  $D_{x,\mu,\mu}\tau_y(f, x, \mu)$ .

Пусть вначале функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема и равна нулю вне некоторого отрезка  $[a, b] \subset (-1, -y) \cup (-y, y) \cup (y, 1)$ . Применяя свойств 5) и 3) из леммы 3.1, получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \tau_y(D_{x,\mu,\mu}f, x, \mu) P_n^{(\mu,\mu)}(x)(1-x^2)^\mu dx \\ &= P_n^{(0,2\mu)}(y) \int_{-1}^1 D_{x,\mu,\mu}f(x) P_n^{(\mu,\mu)}(x)(1-x^2)^\mu dx. \end{aligned}$$

Интегрируя дважды по частям, учитывая, что  $f(x) = 0$  и  $f'(x) = 0$  вне  $[a, b] \subset (-1, 1)$ , получим, что

$$I = P_n^{(0,2\mu)}(y) \int_{-1}^1 D_{x,\mu,\mu}P_n^{(\mu,\mu)}(x)f(x)(1-x^2)^\mu dx.$$

Известно, что [1, с.171]

$$D_{x,\mu,\mu}P_n^{(\mu,\mu)}(x) = -n(n+2\mu+1)P_n^{(\mu,\mu)}(x).$$

Поэтому

$$I = -n(n+2\mu+1)P_n^{(0,2\mu)}(y) \int_{-1}^1 f(x)P_n^{(\mu,\mu)}(x)(1-x^2)^\mu dx.$$

Отсюда, применяя свойств 3) и 5) леммы 3.1 и интегрируя дважды по частям, учитывая, что  $\tau_y(f, x, \mu) = 0$  вне некоторого отрезка  $[\gamma, \delta] \subset (-1, 1)$ , получаем, что

$$I = \int_{-1}^1 D_{x,\mu,\mu}\tau_y(f, x, \mu) P_n^{(\mu,\mu)}(x)(1-x^2)^\mu dx.$$

Следовательно, при фиксированном  $y$  все коэффициенты Фурье–Якоби функции

$$F(x) = \tau_y(D_{x,\mu,\mu}f, x, \mu) - D_{x,\mu,\mu}\tau_y(f, x, \mu)$$

по системе многочленов  $\{P_n^{(\mu,\mu)}(x)\}_{n=0}^\infty$  равны нулю. Из свойства полноты системы  $\{P_n^{(\mu,\mu)}(x)\}_{n=0}^\infty$  заключаем, что  $F(x) = 0$  почти всюду на  $[-1, 1]$ .

Тем самым равенство (2) доказано при фиксированном  $y$  для функции  $f(x)$  бесконечно дифференцируемой и равной нулю вне некоторого отрезка  $[a, b] \subset (-1, -y) \cup (-y, y) \cup (y, 1)$ .

Пусть теперь функция  $f(x)$  имеет на каждом отрезке  $[a, b] \subset (-1, 1)$  абсолютно непрерывную производную  $f'(x)$ . Пусть функция  $g(x)$  бесконечно дифференцируема и равна нулю вне некоторого отрезка  $[c, d] \subset (-1, -y) \cup (-y, y) \cup (y, 1)$ . Интегрируя дважды по частям, учитывая, что

$$g(x)(1-x^2)^{\mu+1} \frac{d}{dx} \tau_y(f, x, \mu) \rightarrow 0$$

и

$$\tau_y(f, x, \mu)(1-x^2)^{\mu+1} \frac{d}{dx} g(x) \rightarrow 0$$

для  $x \rightarrow -1+0$  и  $x \rightarrow 1-0$ , получим, что

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-1}^1 D_{x,\mu,\mu}\tau_y(f, x, \mu) g(x)(1-x^2)^\mu dx \\ &= \int_{-1}^1 D_{x,\mu,\mu}g(x)\tau_y(f, x, \mu)(1-x^2)^\mu dx. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3.1, имеем

$$J_1 = \int_{-1}^1 f(x) \tau_y(D_{x,\mu,\mu} g, x, \mu) (1-x^2)^\mu dx.$$

Пусть теперь

$$J_2 = \int_{-1}^1 \tau_y(D_{x,\mu,\mu} f, x, \mu) g(x) (1-x^2)^\mu dx.$$

Аналогично применяя лемму 3.1 и интегрируя дважды по частям, получаем, что

$$J_2 = \int_{-1}^1 D_{x,\mu,\mu} \tau_y(g, x, \mu) f(x) (1-x^2)^\mu dx.$$

Следовательно

$$J_2 - J_1 = \int_{-1}^1 (D_{x,\mu,\mu} \tau_y(g, x, \mu) - \tau_y(D_{x,\mu,\mu} g, x, \mu)) f(x) (1-x^2)^\mu dx.$$

Но для бесконечно дифференцируемой и равной нулю вне некоторого отрезка  $[c, d] \subset (-1, -y) \cup (-y, y) \cup (y, 1)$  функции  $g(x)$  доказано равенство (2) при фиксированном  $y$  и почти всех  $x \in [-1, 1]$ . Отсюда

$$J_2 - J_1 = \int_{-1}^1 (\tau_y(D_{x,\mu,\mu} f, x, \mu) - D_{x,\mu,\mu} \tau_y(f, x, \mu)) g(x) (1-x^2)^\mu dx = 0$$

для всех  $y$ . Так как, отрезок  $[c, d] \subset (-1, -y) \cup (-y, y) \cup (y, 1)$  выбран любым, а функция  $g(x)$  — любая бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю вне отрезка  $[c, d]$ , то равенство (2) справедливо почти всюду на  $[-1, 1]$  при фиксированном  $y$ .

Равенство

$$\tau_y(D_{x,\mu,\mu} f, x, \mu) = D_{y,0,2\mu} \tau_y(f, x, \mu)$$

доказывается аналогично.

Лемма 3.4 доказана.  $\square$

**Лемма 3.5.** Пусть функция  $f(x)$  имеет на каждом отрезке  $[a, b] \subset (-1, 1)$  абсолютно непрерывную производную  $f'(x)$ . Тогда для почти всех  $x \in [-1, 1]$  выполнены следующие равенства

$$\begin{aligned} \tau_y(f, x, \mu) - f(x) &= \int_1^y (1-v)^{-1} (1+v)^{-2\mu-1} \\ &\quad \times \int_1^v (1+u)^{2\mu} \tau_u(D_{x,\mu,\mu} f, x, \mu) du dv \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tau_y(f, x, \mu) - \tau_0(f, x, \mu) &= - \int_0^y (1-v)^{-1} (1+v)^{-2\mu-1} \\ &\quad \times \int_v^{-1} (1+u)^{2\mu} \tau_u(D_{x,\mu,\mu} f, x, \mu) du dv. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Докажем первое равенство леммы. Если функция  $f(x)$  — бесконечно дифференцируема и равна нулю вне некоторого отрезка  $[a, b] \subset$

$(-1, -y) \cup (-y, y) \cup (y, 1)$ , то, применяя леммы 3.4 и 3.1, получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-2\mu-1} \int_1^v (1+u)^{2\mu} \tau_u(D_{x,\mu,\mu}f, x, \mu) du dv \\ &= \int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-2\mu-1} \int_1^v (1+u)^{2\mu} D_{u,0,2\mu} \tau_u(f, x, \mu) du dv \\ &= \tau_y(f, x, \mu) - f(x) \end{aligned}$$

при почти всех  $x \in [-1, 1]$ .

Пусть теперь  $f(x)$  имеет на каждом отрезке  $[a, b] \subset (-1, 1)$  абсолютно непрерывную производную  $f'(x)$ . Пусть функция  $g(x)$  бесконечно дифференцируема и равна нулю вне некоторого отрезка  $[c, d] \subset (-1, -y) \cup (-y, y) \cup (y, 1)$ . Тогда меняя порядок интегрирования, потом применяя лемму 3.1 и, рассуждая аналогично как при доказательстве леммы 3.4, интегрируя дважды по частям, нетрудно доказать, что

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^1 \int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-2\mu-1} \\ &\quad \times \int_1^v (1+u)^{2\mu} \tau_u(D_{x,\mu,\mu}f, x, \mu) g(x)(1-x^2)^\mu du dv dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^\mu \int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-2\mu-1} \\ &\quad \times \int_1^v (1+u)^{2\mu} D_{x,\mu,\mu} \tau_u(g, x, \mu) du dv dx. \end{aligned}$$

Но для бесконечно дифференцируемой и равной нулю вне некоторого отрезка  $[c, d] \subset (-1, -y) \cup (-y, y) \cup (y, 1)$  функции  $g(x)$  уже доказано первое равенство леммы при почти всех  $x \in [-1, 1]$ . Следовательно,

$$J = \int_{-1}^1 (\tau_y(f, x, \mu) - f(x)) g(x)(1-x^2)^\mu dx.$$

Отсюда, первое равенство леммы вытекает в силу произвольности отрезка  $[c, d]$  и функции  $g(x)$ .

Второе равенство леммы доказывается аналогично.  $\square$

**Следствие.** Пусть функция  $f(x)$  имеет на каждом отрезке  $[a, b] \subset (-1, 1)$  абсолютно непрерывную производную  $f'(x)$ . Тогда для почти всех  $x \in [-1, 1]$  выполнены следующие равенства

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_t(f, x, \mu) - f(x) &= \int_0^t (\sin v/2)^{-1} (\cos v/2)^{-4\mu-1} \\ &\quad \times \int_0^v \hat{\tau}_u(D_{x,\mu,\mu}f, x, \mu) (\sin u/2) (\cos u/2)^{4\mu+1} du dv \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_t(f, x, \mu) - \hat{\tau}_{\pi/2}(f, x, \mu) &= - \int_{\pi/2}^t (\sin v/2)^{-1} (\cos v/2)^{-4\mu-1} \\ &\quad \times \int_v^\pi \hat{\tau}_u(D_{x,\mu,\mu}f, x, \mu) (\sin u/2) (\cos u/2)^{4\mu+1} du dv. \end{aligned}$$

Первое равенство следует сразу из первого равенства леммы 3.5, подстановкой  $\cos u$  и  $\cos v$  вместо  $u$  и  $v$  соответственно. Аналогично этому, второе равенство следует из второго равенства леммы 3.5.



**Лемма 3.6.** Пусть  $P_n(x)$  — алгебраический многочлен степени не выше, чем  $n-1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\rho \geq 0$ ;

$$\begin{aligned} \alpha &> -\frac{1}{p} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \alpha &\geq 0 \quad \text{при } p = \infty. \end{aligned}$$

Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|P'_n(x)\|_{p, \alpha+1/2} &\leq C_1 n \|P_n\|_{p, \alpha}, \\ \|P_n\|_{p, \alpha} &\leq C_2 n^{2\rho} \|P_n\|_{p, \alpha+\rho}, \end{aligned}$$

где постоянные  $C_1$  и  $C_2$  не зависят от  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Лемма 3.6 доказана в работе [2].

**Лемма 3.7.** Пусть даны числа  $p$ ,  $\alpha$  и  $\mu$  такие, что  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ;

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} < \alpha \leq \mu &\quad \text{при } p = 1, \\ -\frac{1}{2p} < \alpha < \mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} &\quad \text{при } 1 < p < \infty, \\ 0 \leq \alpha < \mu + \frac{1}{2} &\quad \text{при } p = \infty. \end{aligned}$$

Пусть  $f \in AD(p, \alpha, \mu)$ . Тогда справедливо неравенство

$$E_n(f)_{p, \alpha} \leq C \frac{1}{n^2} \|D_{x, \mu, \mu} f(x)\|_{p, \alpha},$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $f$ ,  $n$  и  $\mu$ .

*Доказательство.* Для фиксированного натурального числа  $q > \mu$  выберем натуральное число  $n$  такое, что

$$\frac{n-1}{q+2} < m < \frac{n-1}{q+2} + 1.$$

Нетрудно доказать, что при условиях леммы имеем  $f \in L_{1, \mu}$ . В работе [3] доказано, что функция

$$Q(x) = \frac{1}{\gamma_m} \int_0^\pi T_{\cos t}(f, x, \mu) \left( \frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2q+4} (\sin t)^{2\mu+1} dt,$$

где

$$\gamma_m = \int_0^\pi \left( \frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2q+4} (\sin t)^{2\mu+1} dt,$$

есть алгебраический многочлен степени не выше, чем  $n-1$ . Поэтому, применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\begin{aligned} E_n(f)_{p, \alpha} &\leq \|f - Q\|_{p, \alpha} \\ &\leq \frac{1}{\gamma_m} \int_0^\pi \|T_{\cos t}(f, x, \mu) - f(x)\|_{p, \alpha} \left( \frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2q+4} (\sin t)^{2\mu+1} dt. \end{aligned}$$

В работе [4, с.47] доказано, что для всех  $t$  справедливо неравенство

$$\|T_{\cos t}(f, x, \mu) - f(x)\|_{p, \alpha} \leq C_1 t^2 \|D_{x, \mu, \mu} f(x)\|_{p, \alpha}.$$

Поэтому

$$E_n(f)_{p, \alpha} \leq C_1 \|D_{x, \mu, \mu} f(x)\|_{p, \alpha} \frac{1}{\gamma_m} \int_0^\pi t^2 \left( \frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2q+4} (\sin t)^{2\mu+1} dt.$$

Применяя стандартную оценку ядра Джексона, получаем, что

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leq C_2 \frac{1}{n^2} \|D_{x,\mu,\mu} f(x)\|_{p,\alpha} \leq C_3 \frac{1}{n^2} \|D_{x,\mu,\mu} f(x)\|_{p,\alpha}.$$

Лемма 3.7 доказана.  $\square$

#### 4. ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

**Теорема 4.1.** Пусть даны числа  $p, \alpha$  и  $\mu$  такие, что  $1 \leq p \leq \infty, \mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ;

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} < \alpha - \frac{\mu}{2} \leq 0 & \quad \text{при } p = 1, \\ -\frac{1}{2p} < \alpha - \frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} & \quad \text{при } 1 < p < \infty, \\ 0 \leq \alpha - \frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} & \quad \text{при } p = \infty. \end{aligned}$$

Пусть  $f \in L_{p,\alpha}$ . Тогда для всех  $\delta \in (0, \pi)$  имеют место неравенства

$$C_1 K(f, \delta, \mu)_{p,\alpha} \leq \hat{\omega}(f, \delta, \mu)_{p,\alpha} \leq C_2 \frac{1}{(\cos \delta/2)^{2\mu}} K(f, \delta, \mu)_{p,\alpha},$$

где положительные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  не зависят от  $f, \delta$  и  $\mu$ .

*Доказательство.* Покажем, что для любой функции  $g(x) \in AD(p, \alpha, \mu)$  и любого  $t \in (-\pi, \pi)$  справедливо неравенство

$$\|\hat{\tau}_t(g, x, \mu) - g(x)\|_{p,\alpha} \leq C_3 \frac{1}{(\cos t/2)^{2\mu}} t^2 \|D_{x,\mu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha}, \quad (3)$$

где постоянная  $C_3$  не зависит от  $g, t$  и  $\mu$ .

Пусть  $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ . Тогда по следствию из леммы 3.5, применяя обобщенное неравенство Минковского и лемму 3.3, получим

$$\begin{aligned} I_1 = \|\hat{\tau}_t(g, x, \mu) - g(x)\|_{p,\alpha} &\leq \int_0^t (\sin v/2)^{-1} (\cos v/2)^{-4\mu-1} \\ &\quad \times \int_0^v \|\hat{\tau}_u(D_{x,\mu,\mu} g, x, \mu)\|_{p,\alpha} (\sin u/2) (\cos u/2)^{4\mu+1} du dv \\ &\leq C_4 \|D_{x,\mu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha} \int_0^t (\sin v/2)^{-1} (\cos v/2)^{-4\mu-1} \\ &\quad \times \int_0^v (\sin u/2) (\cos u/2)^{2\mu+1} du dv. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что при  $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$  имеем

$$\int_0^t (\sin v/2)^{-1} (\cos v/2)^{-4\mu-1} \int_0^v (\sin u/2) (\cos u/2)^{2\mu+1} du dv \leq C_5 t^2,$$

получаем, что

$$I_1 \leq C_6 t^2 \|D_{x,\mu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha} \leq C_6 \frac{1}{(\cos t/2)^{2\mu}} t^2 \|D_{x,\mu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha}.$$

Пусть  $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$ . Тогда по следствию из леммы 3.5, применяя обобщенное неравенство Минковского, потом лемму 3.3, получаем, что

$$\begin{aligned} I_2 = \|\hat{\tau}_t(g, x, \mu) - \hat{\tau}_{\pi/2}(g, x, \mu)\|_{p,\alpha} \\ \leq C_7 \|D_{x,\mu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha} \int_{\pi/2}^t (\sin v/2)^{-1} (\cos v/2)^{-4\mu-1} \\ \quad \times \int_v^\pi (\sin u/2) (\cos u/2)^{2\mu+1} du dv. \end{aligned}$$

Учитывая, что для  $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$

$$\int_{\pi/2}^t (\sin v/2)^{-1} (\cos v/2)^{-4\mu-1} \int_v^\pi (\sin u/2) (\cos u/2)^{2\mu+1} du dv \leq C_8 \frac{1}{(\cos t/2)^{2\mu}},$$

получаем, что

$$I_2 \leq C_9 \frac{1}{(\cos t/2)^{2\mu}} \|D_{x,\mu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha} \leq C_9 \frac{1}{(\cos t/2)^{2\mu}} t^2 \|D_{x,\mu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha}. \quad (4)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \|\hat{\tau}_t(g, x, \mu) - g(x)\|_{p,\alpha} &\leq \left\| \hat{\tau}_t(g, x, \mu) - \hat{\tau}_{\pi/2}(g, x, \mu) \right\|_{p,\alpha} + \left\| \hat{\tau}_{\pi/2}(g, x, \mu) - g(x) \right\|_{p,\alpha}, \end{aligned}$$

то, применяя неравенство (4) и уже доказанные для  $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$  неравенства (3), получаем, что для  $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$

$$\|\hat{\tau}_t(g, x, \mu) - g(x)\|_{p,\alpha} \leq C_{10} \frac{1}{(\cos t/2)^{2\mu}} t^2 \|D_{x,\mu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha}.$$

Таким образом, неравенство (3) доказано при  $0 < t < \pi$ .

Так как,  $\tau_{\cos t}(g, x, \mu) = \tau_{\cos(-t)}(g, x, \mu)$ , то можно считать, что неравенство (3) справедливо для  $0 < |t| < \pi$ .

Пусть теперь  $f \in L_{p,\alpha}$  и  $0 < |t| \leq \delta < \pi$ . Тогда для любой функции  $g(x) \in AD(p, \alpha, \mu)$ , применяя лемму 3.1, имеем

$$\begin{aligned} \|\hat{\tau}_t(f, x, \mu) - f(x)\|_{p,\alpha} &\leq \|\hat{\tau}_t(f - g, x, \mu)\|_{p,\alpha} + \|\hat{\tau}_t(g, x, \mu) - g(x)\|_{p,\alpha} + \|g - f\|_{p,\alpha}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3.3 и неравенство (3), получаем, что

$$\|\hat{\tau}_t(f, x, \mu) - f(x)\|_{p,\alpha} \leq C_{11} \frac{1}{(\cos t/2)^{2\mu}} \left( \|f - g\|_{p,\alpha} + t^2 \|D_{x,\mu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha} \right),$$

где постоянная  $C_{11}$  не зависит от  $f, g, t$  и  $\mu$ . Следовательно, переходя к точной нижней грани в этом неравенстве при  $|t| \leq \delta$  и  $g(x) \in AD(p, \alpha, \mu)$ , получаем правое неравенство теоремы для  $0 < \delta < \pi$ .

Для доказательства левого неравенства рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} g_\delta(x) &= \frac{1}{\varkappa(\delta)} \int_0^\delta (\sin v/2)^{-1} (\cos v/2)^{-4\mu-1} \\ &\quad \times \int_0^v \hat{\tau}_u(f, x, \mu) (\sin u/2) (\cos u/2)^{4\mu+1} du dv, \end{aligned}$$

где

$$\varkappa(\delta) = \int_0^\delta (\sin v/2)^{-1} (\cos v/2)^{-4\mu-1} \int_0^v (\sin u/2) (\cos u/2)^{4\mu+1} du dv.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского и лемму 3.3, получаем, что

$$\|g_\delta(x)\|_{p,\alpha} \leq C_{12} \frac{1}{(\cos \delta/2)^{2\mu}} \|f\|_{p,\alpha},$$

т.е.  $g_\delta(x) \in L_{p,\alpha}$ .

Пусть  $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ . Тогда легко показать, что

$$\varkappa(\delta) \geq C_{13} \delta^2, \quad (5)$$

где постоянная  $C_{13}$  не зависит от  $\delta$  и  $\mu$ .

Нетрудно показать, что при условиях теоремы, из  $f \in L_{p,\alpha}$  следует  $f \in L_{1,\mu}$ .  
Обозначим

$$g(x) = - \int_0^x (1-y^2)^{-\mu-1} \int_y^1 (1-z^2)^\mu \left( f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right) dz dy,$$

где  $c_1 = \int_{-1}^1 f(z)(1-z^2)^\mu dz$ ,  $c_0 = \int_{-1}^1 (1-z^2)^\mu dz$ . Ясно, что  $g(x) \in AD(p, \alpha, \mu)$ .  
Поскольку

$$D_{x,\mu,\mu}g(x) = f(x) - \frac{c_1}{c_0},$$

то

$$\begin{aligned} g_\delta(x) &= \frac{1}{\varkappa(\delta)} \int_0^\delta (\sin v/2)^{-1} (\cos v/2)^{-4\mu-1} \\ &\quad \times \int_0^v \hat{\tau}_u(D_{x,\mu,\mu}g, x, \mu) (\sin u/2)(\cos u/2)^{4\mu+1} du dv + \frac{c_1}{c_0}. \end{aligned}$$

Применяя следствие из леммы 3.5, получаем, что

$$g_\delta(x) = \frac{1}{\varkappa(\delta)} (\hat{\tau}_\delta(g, x, \mu) - g(x)) + \frac{c_1}{c_0}.$$

Применяя к этому равенству оператор  $D_{x,\mu,\mu}$  и лемму 3.4, находим

$$\begin{aligned} D_{x,\mu,\mu}g_\delta(x) &= \frac{1}{\varkappa(\delta)} (\hat{\tau}_\delta(D_{x,\mu,\mu}g, x, \mu) - D_{x,\mu,\mu}g(x)) \\ &= \frac{1}{\varkappa(\delta)} (\hat{\tau}_\delta(f, x, \mu) - f(x)). \end{aligned}$$

Следовательно, применяя леммы 3.3 и 3.4, заключаем, что  $g_\delta(x) \in AD(p, \alpha, \mu)$ .

Из последнего равенства и неравенства (5), получаем, что

$$\|D_{x,\mu,\mu}g_\delta(x)\|_{p,\alpha} \leq C_{14} \frac{1}{\delta^2} \|\hat{\tau}_\delta(f, x, \mu) - f(x)\|_{p,\alpha},$$

откуда следует, что

$$\|D_{x,\mu,\mu}g_\delta(x)\|_{p,\alpha} \leq C_{14} \frac{1}{\delta^2} \hat{\omega}(f, \delta, \mu)_{p,\alpha}.$$

С другой стороны, применяя обобщенное неравенство Минковского, получаем, что

$$\begin{aligned} \|f(x) - g_\delta(x)\|_{p,\alpha} &\leq \frac{1}{\varkappa(\delta)} \int_0^\delta (\sin v/2)^{-1} (\cos v/2)^{-4\mu-1} \\ &\quad \times \int_0^v \|f(x) - \hat{\tau}_u(f, x, \mu)\|_{p,\alpha} (\sin u/2)(\cos u/2)^{4\mu+1} du dv \leq \hat{\omega}(f, \delta, \mu)_{p,\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом, для  $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$  показано, что

$$I_\delta = \|f(x) - g_\delta(x)\|_{p,\alpha} + \delta^2 \|D_{x,\mu,\mu}g_\delta(x)\|_{p,\alpha} \leq C_{15} \hat{\omega}(f, \delta, \mu)_{p,\alpha}.$$

Но для  $\frac{\pi}{2} \leq \delta < \pi$  имеем

$$\begin{aligned} I_\delta &\leq \pi^2 (\|f(x) - g_\delta(x)\|_{p,\alpha} + \|D_{x,\mu,\mu}g_\delta(x)\|_{p,\alpha}) \\ &\leq C_{16} \hat{\omega}(f, 1, \mu)_{p,\alpha} \leq C_{16} \hat{\omega}(f, \delta, \mu)_{p,\alpha}, \end{aligned}$$

и следовательно, левое неравенство теоремы справедливо при всех  $0 < \delta < \pi$ .

Для  $\delta = 0$  утверждение теоремы тривиально.

Теорема 4.1 полностью доказана.  $\square$

*Доказательство теоремы 2.1.* Для любой функции  $g(x) \in AD(p, \alpha, \mu)$ , применяя лемму 3.7, имеем

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leq E_n(f - g)_{p,\alpha} + E_n(g)_{p,\alpha} \leq \|f - g\|_{p,\alpha} + C_3 \frac{1}{n^2} \|D_{x,\mu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha},$$

где постоянная  $C_3$  не зависит от  $g$  и  $n$ . Отсюда, переходя к точной нижней грани по всем  $g(x) \in AD(p, \alpha, \mu)$  и потом применяя теорему 4.1, получим

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leq C_4 K \left( f, \frac{1}{n}, \mu \right)_{p,\alpha} \leq C_5 \hat{\omega} \left( f, \frac{1}{n}, \mu \right)_{p,\alpha}.$$

Левое неравенство теоремы доказано.

Докажем правое неравенство теоремы. Пусть  $P_n(x)$  — алгебраический многочлен наилучшего приближения для  $f$ , степени не выше, чем  $n - 1$ . Пусть  $k$  выбрано так, что

$$2^k \leq n < 2^{k+1}. \quad (6)$$

Из теоремы 4.1, учитывая, что  $P_{2^k}(x) \in AD(p, \alpha, \mu)$ , следует, что

$$\hat{\omega} \left( f, \frac{1}{n}, \mu \right)_{p,\alpha} \leq C_6 \left( \|f - P_{2^k}\|_{p,\alpha} + \frac{1}{n^2} \|D_{x,\mu,\mu} P_{2^k}(x)\|_{p,\alpha} \right).$$

Так как,

$$D_{x,\mu,\mu} P_{2^k}(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} D_{x,\mu,\mu} (P_{2^{\nu+1}}(x) - P_{2^\nu}(x)),$$

учитывая, что из леммы 3.6 следует, что

$$\begin{aligned} \|D_{x,\mu,\mu} P_n(x)\|_{p,\alpha} &\leq \|(1 - x^2)P_n''(x)\|_{p,\alpha} + (2\mu + 2) \|P_n'(x)\|_{p,\alpha} \\ &\leq C_7 n^2 \|P_n\|_{p,\alpha}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \|D_{x,\mu,\mu} P_{2^k}(x)\|_{p,\alpha} &\leq C_8 \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{2(\nu+1)} \|P_{2^{\nu+1}} - P_{2^\nu}\|_{p,\alpha} \\ &\leq 2C_8 \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{2(\nu+1)} E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha}. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая неравенство (6), имеем

$$\hat{\omega} \left( f, \frac{1}{n}, \mu \right)_{p,\alpha} \leq C_9 \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=0}^k 2^{2(\nu+1)} E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha}.$$

Замечая, что для  $\nu = 1, \dots, k$

$$\sum_{j=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} j E_j(f)_{p,\alpha} \geq 2^{2(\nu-1)} E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha},$$

находим

$$\begin{aligned} \hat{\omega} \left( f, \frac{1}{n}, \mu \right)_{p,\alpha} &\leq C_{10} \frac{1}{n^2} \left( 4E_1(f)_{p,\alpha} + \sum_{\nu=1}^k \sum_{j=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} j E_j(f)_{p,\alpha} \right) \\ &\leq C_{11} \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^n \nu E_\nu(f)_{p,\alpha}. \end{aligned}$$

Теорема 2.1 доказана.  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, Москва, 1969.
- [2] М. К. Потапов, *Некоторые неравенства для полиномов и их производных*, Вестник МГУ, сер. мат. (1960), N. 2, 10–20.
- [3] ———, *О структурных и конструктивных характеристиках некоторых классов функций*, Тр. мат. ин.-та АН СССР **131** (1974), 211–231, 247–248.
- [4] ———, *О приближении алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Якоби*, Вестник МГУ, сер. мат. (1983), N. 4, 43–52.
- [5] ———, *О применении одного оператора обобщенного сдвига в теории приближений*, Вестник МГУ, сер. мат.-мех. (1998), no. 3, 38–48, 74.
- [6] М. К. Potapov, F. M. Berisha, *Direct and inverse theorems of approximation theory for a generalized modulus of smoothness*, Anal. Math. **25** (1999), no. 3, 187–203.
- [7] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, “Наука”, Москва, 1965.

М. К. ПОТАПОВ, МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ЛОМОНОСОВА, МОСКВА 117234, РОССИЯ

Ф. М. БЕРИША, МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ЛОМОНОСОВА, МОСКВА 117234, РОССИЯ

*Current address:* F. M. Berisha, Faculty of Mathematics and Sciences, University of Prishtina, Nënë Tereza 5, 10000 Prishtina, Kosovo

*E-mail address:* faton.berisha@uni-pr.edu